Kolokwium z Geometrii I

13 grudnia 2023

Proszę o rozwiązanie każdego zadania na osobnej, czytelnie podpisanej kartce. Do każdego zadania proszę zamieścić rysunek oraz szczegółowe uzasadnienia.

1. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $AC > BD$. Okrąg opisany na trójkącie BCD przecina odcinek AC w punkcie M. Wykaż, że prosta BD jest wspólną styczną okręgów opisanych na trójkątach ABM i ADM.

2. Dany jest trójkąt ABC. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D. Wykaż, że

$$AD > \frac{AB + AC}{2}.$$

3. Dany jest trójkąt ABC o kątach $\measuredangle BAC = 30^\circ$ i $\measuredangle ACB = 50^\circ$. Punkt D leży na boku AB, przy czym $BD = BC$. Udowodnij, że $CD = AB$.

4. Czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Punkty K, L, M, N należą odpowiednio do odcinków otwartych CD, DA, AB, BC, przy czym $[ABK] = [CDM]$ oraz $[BCL] = [DAN]$. Udowodnij, że wówczas $[ABK] = [BCL]$.

Uwaga: $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

5. Punkt P jest środkiem krótszego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, w którym $\measuredangle BAC = 60^\circ$. Punkty I_B oraz I_C są środkami okręgów dopisanych do tego trójkąta, stycznych odpowiednio do boków CA oraz AB. Punkt M jest środkiem odcinka I_BI_C. Wykaż, że $PM = 2 \cdot BP$.